

M A T E M A T I K A 1

L E K C I J A 2

2 – L2 MATRICE I DETERMINANTE**Matrice**

Definicija matrice: *matrica* (formata $m \times n$) sa članovima a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, je sledeća pravougaona shema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Oznaka: $[a_{ij}]_n^m$. *Definicija jednakosti dve matrice:* $[a_{ij}]_n^m = [b_{ij}]_n^m \iff a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

Sabiranje matrica

Zbir dve matrice $A = [a_{ij}]_n^m$ i $B = [b_{ij}]_n^m$ je matrica $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_n^m$.
Svojstva sabiranja matrica:

- 1^0 $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asocijativnost);
- 2^0 $A + 0 = 0 + A = A$ (egzistencija neutralnog elementa);
- 3^0 $A + (-A) = -A + A = 0$ (egzistencija suprotnog elementa);
- 4^0 $B + A = A + B$ (komutativnost).

Dokaz — samostalno.

Množenje matrice brojem

Proizvod matrice $A = [a_{ij}]_n^m$ i broja h , hA , je matrica $[ha_{ij}]_n^m$. Svojstva množenja matrice brojem:

$$1^0 \ 1 \cdot A = A;$$

$$2^0 \ (h + k)A = hA + kA \text{ (distributivnost u odnosu na sabiranje brojeva);}$$

$$3^0 \ h(A + B) = hA + hB \text{ (distributivnost u odnosu na sabiranje matrica);}$$

$$4^0 \ k(hA) = (kh)A.$$

Dokaz — samostalno.

Množenje matrica

Proizvod dve matrice $A = [a_{ij}]_n^m$ i $B = [b_{jk}]_p^n$, AB , je matrica $\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right]_p^m$.

Svojstva množenja matrica:

$$1^0 \ (AB)C = A(BC) \text{ (asocijativnost);}$$

$$2^0 \ AE_n = E_m A = A;$$

$$3^0 \ (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B, \ A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 \text{ (distributivnost u odnosu na sabiranje matrica);}$$

$$4^0 \ (hA)B = A(hB) = h(AB).$$

Dokaz — samostalno.

Stepenovanje matrice prirodnim brojem

Stepen A^n : (i) $A^1 = A$; (ii) $A^{n+1} = A^n A$, $n \in \mathbb{N}$. Svojstva:

$$1^0 \ A^m A^n = A^{m+n};$$

$$2^0 \ (A^m)^n = A^{mn}.$$

Dokaz — samostalno.

Determinante

Broj inverzija permutacije p skupa $\mathcal{X}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ — broj parova članova $(p(i), p(j))$ takvih da je $i < j$, a $p(i) > p(j)$. Oznaka — $J(p)$. Determinanta kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_n^n$ je

$$\det A := \sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{J(p)} a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot \dots \cdot a_{np(n)}$$

gde je \mathcal{P}_n skup svih permutacija skupa \mathcal{X}_n . Oznaka:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Izračunavanje determinanti trećeg reda — Sarusovo pravilo:

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

pravilo trouglova:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Minori i algebarski kofaktori članova kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_n$ — *minor* D_{ij} člana a_{ij} je determinanta podmatrice dobijene izostavljanjem i -te vrste i j -te kolone; *algebarski kofaktor* člana a_{ij} je $A_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$. *Svojstva determinanti*:

- 1⁰ $\det A^T = \det A$;
 - 2⁰ zamena mesta dveju vrsta (kolona) menja znak determinante;
 - 3⁰ $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ ($= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$) (razvijanje po članovima i -te vrste (j -te kolone));
 - 4⁰ ako su dve vrste (kolone) jednake, tada je $\det A = 0$;
 - 5⁰ množenjem neke vrste (kolone) nekim brojem determinanta se pomnoži tim brojem;
 - 6⁰ ako je neka vrsta (kolona) jednaka 0, onda je $\det A = 0$;
 - 7⁰ ako su neke dve vrste (kolone) proporcionalne, onda je $\det A = 0$;
 - 8⁰ ako je neka vrsta (kolona) zbir vrsta (kolona) M_1 i M_2 , tada je $\det A$ jednaka zbiru $\det B_1$ i $\det B_2$, gde je B_i matrica koja se od A razlikuje samo po tome što na mestu te vrste (kolone) stoji M_i , $i = 1, 2$;
 - 9⁰ dodavanjem nekoj vrsti (koloni) neke druge vrste (kolone) pomnožene nekim brojem determinanta se ne promeni.
- Dokaz — na vežbama (AG).

Invertovanje kvadratne matrice

Inverzna matrica kvadratne matrice A — matrica B za koju je $AB = BA = E$ ($E = E_n$). *Jedinstvenost:* $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$. Oznaka: A^{-1} . *Egzistencija i nalaženje inverzne matrice:* $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Dokaz — $\exists A^{-1} \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$; $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$, gde je $\text{adj } A = [A_{ji}]_n^n$ (adjungovana matrica) (provera — na vežbama (AG)). *Svojstva invertovanja matrice:*

- 1⁰ $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2⁰ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Rang matrice

Rang matrice A — najviši red njenih minora različitih od 0, tj. njenih regularnih kvadratnih podmatrica. Ako je $r(A) = r(B)$ i A, B imaju isti format, onda kažemo da je matrica A ekvivalentna B , $A \sim B$. *Elementarne transformacije matrice* po vrstama (kolonama):

- (a) permutovanje neke dve vrste (kolone);
- (b) množenje neke vrste (kolone) nekim brojem različitim od 0;
- (c) dodavanje nekoj vrsti (koloni) neke druge vrste (kolone) pomnožene nekim brojem.

Teorema: Primena neke elementarne transformacije na matricu ne menja rang te matrice. Dokaz — na vežbama (AG).

Nalaženje ranga matrice primenom elementarnih transformacija: Svaka matrica može da se svede na neku dijagonalnu, uzastopnom primenom elementarnih transformacija, konačno mnogo puta, a zatim se njen rang može lako naći kao broj dijagonalnih elemenata različitih od 0. Ali ne mora se ići do dijagonalne matrice. I rang tzv. gornje trougaone, kao i gornje kvazi-trougaone matrice lako se nalazi neposredno po definiciji. *Gornja trougaona matrica* — ona čiji su svi članovi ispod glavne dijagonale jednaki 0. Ako su svi dijagonalni članovi takve matrice različiti od 0, njen rang je jednak broju dijagonalnih članova. *Gornja kvazi-trougaona matrica* — ona kod koje drugi indeksi članova vrsta koji su prvi različiti od 0, idući s leva na desno, čine strogo rastući niz. Spomenute članove zvaćemo graničnim članovima. Rang gornje kvazi-trougaone matrice je jednak broju graničnih članova, jer je kvadratna podmatrica koja se dobija izostavljanjem svih vrsta i svih kolona izuzev onih u kojima leže granični članovi — gornja trougaona matrica sa dijagonalnim članovima različitim od 0. *Teorema:* Svaka matrica može se

svesti na neku gornju kvazi-trougaonu primenom samo elementarnih transformacija po vrstama, konačno mnogo puta. Dokaz — na vežbama (AG). Posle svodjenja matrice na gornju kvazi-trougaonu, može se nastaviti sa primenom elementarnih transformacija, sada i po vrstama i po kolonama, te svesti matricu na neku dijagonalnu. Dokaz — na vežbama (AG).